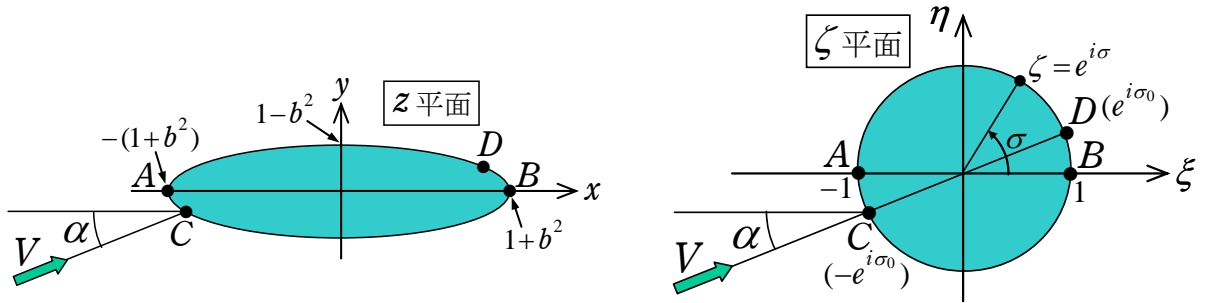


楕円翼の2次元ポテンシャル流

H29(2017).2.3 片柳亮二

1. 楕円翼

z 平面上の楕円翼を、 ζ 平面上の円に写像することにより、2次元ポテンシャル流を求める。(詳細は参考資料[1]参照)



$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta}, \quad \therefore \frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{b^2}{\zeta^2} \quad (1)$$

この楕円翼は、 $b=0$ とすると円、 $b=1$ とすると平板翼となる。

z 平面の楕円翼は、(1)式において $\zeta = e^{i\sigma}$ とにおいて求められる。

ζ 平面の円の流れの複素速度ポテンシャルは、循環を伴う流れとして次式である。

$$\begin{aligned} w &= V \left(e^{-i\alpha} \zeta + e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \zeta \\ &= \phi + i\psi \end{aligned} \quad (2)$$

この式を ζ で微分すると、 ζ 平面の流れの複素速度が得られる。

$$\frac{dw}{d\zeta} = V \left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta} \quad (3)$$

z 平面の複素速度は、次のように写像変換された ζ 平面の変数で表現される。

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \left\{ V \left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta} \right\} \Big/ \left(1 - \frac{b^2}{\zeta^2} \right) \quad (4)$$

循環の値 Γ は、翼の後縁の速度が無限大にならないためには、対応する円上では $\zeta=1$ において $dw/d\zeta$ が0となるように決める。

$$\left(\frac{dw}{d\zeta} \right)_{\zeta=1} = V \left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} = -i2V \sin \alpha + i \frac{\Gamma}{2\pi} = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \Gamma = 4\pi V \sin \alpha \quad (6)$$

このように翼の後縁から流れが滑らかに流れ去るとして循環の値を決定する方

法は、クッタ・ジュコフスキーの条件と呼ばれている。

循環の式を(2)式に代入すると、 z 平面の複素速度ポテンシャルは次のようになる。

$$w = V \left(e^{-i\alpha} \zeta + e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta} + i2\sin\alpha \cdot \log\zeta \right) \\ = \phi + i\psi \quad (7)$$

循環の式を(4)式に代入すると、 z 平面の複素速度は次のようになる。

$$\frac{dw}{dz} = V \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta^2} + i \frac{2\sin\alpha}{\zeta}}{1 - \frac{b^2}{\zeta^2}} \quad (8)$$

翼に働く力は、ブラジウスの第1公式を適用するために次式を求める。

$$\left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} = \left\{ V \left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta} \right\}^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{b^2}{\zeta^2}} \\ = V^2 \left\{ e^{-i2\alpha} + i \frac{\Gamma e^{-i\alpha}}{\pi V} \cdot \frac{1}{\zeta} + \left(b^2 e^{-i2\alpha} - 2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V^2} \right) \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right\} \quad (9)$$

これをブラジウスの第1公式に適用すると、

$$F_x - iF_y = i \frac{\rho}{2} \oint_c \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta \\ = i \frac{\rho}{2} \left[i2\pi \left(i \frac{V\Gamma e^{-i\alpha}}{\pi} \right) \right] = -\rho V \Gamma (\sin\alpha + i\cos\alpha) \quad (10)$$

これから、次式を得る。

$$F_x = -\rho V \Gamma \sin\alpha, \quad F_y = \rho V \Gamma \cos\alpha \quad (11)$$

$$\therefore L = F_y \cos\alpha - F_x \sin\alpha = \rho V \Gamma (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \rho V \Gamma \quad (12)$$

$$D = F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha = \rho V \Gamma (-\sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha) = 0 \quad (13)$$

ここで、(6)式の循環 Γ を代入すると、次のようになる。

$$L = \rho V \Gamma = 4\pi\rho V^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L, \quad (S = \bar{c} \times 1) \quad (14)$$

$$\therefore C_L = \frac{8\pi}{\bar{c}} \sin\alpha = \frac{4\pi}{1+b^2} \sin\alpha, \quad \text{ここで, } \bar{c} = 2(1+b^2) \quad (15)$$

モーメントは、ブラジウスの第2公式を適用するために、次式を求める。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{dz} z &= V^2 \left\{ e^{-i2\alpha} + i \frac{\Gamma e^{-i\alpha}}{\pi V} \cdot \frac{1}{\zeta} + \left(b^2 e^{-i2\alpha} - 2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V^2} \right) \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right\} \left(\zeta + \frac{b^2}{\zeta} \right) \\ &= V^2 \left\{ e^{-i2\alpha} \zeta + i \frac{\Gamma e^{-i\alpha}}{\pi V} + \left(2b^2 e^{-i2\alpha} - 2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V^2} \right) \frac{1}{\zeta} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

これをブラジウスの第2公式に適用すると、原点まわりの頭上げモーメントが次のように得られる。

$$\begin{aligned} (M)_{\text{原点}} &= \frac{\rho}{2} \text{Real} \left[\oint \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} z d\zeta \right] \\ &= \frac{\rho}{2} \text{Real} \left[i 2\pi V^2 \left(2b^2 e^{-i2\alpha} - 2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V^2} \right) \right] \\ &= \frac{\rho V^2}{2} [4\pi b^2 \sin 2\alpha] = 2\pi \rho V^2 b^2 \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、モーメント係数を導入すると、

$$(M)_{\text{原点}} = 2\pi \rho V^2 b^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_m, \quad (S = \bar{c} \times 1) \quad (18)$$

$$\therefore (C_m)_{\text{原点}} = \frac{4\pi b^2}{\bar{c}^2} \sin 2\alpha = \frac{\pi b^2}{(1+b^2)^2} \sin 2\alpha, \quad \text{ここで, } \bar{c} = 2(1+b^2) \quad (19)$$

次に計算例を示す。

2. 計算例

(1) 循環のない楕円翼

KMAP104 以降で, “0”, “4”, “2” とキーインして,

「2: 楕円翼の流れ」にて下記をキーイン計算した結果を以下に示す.

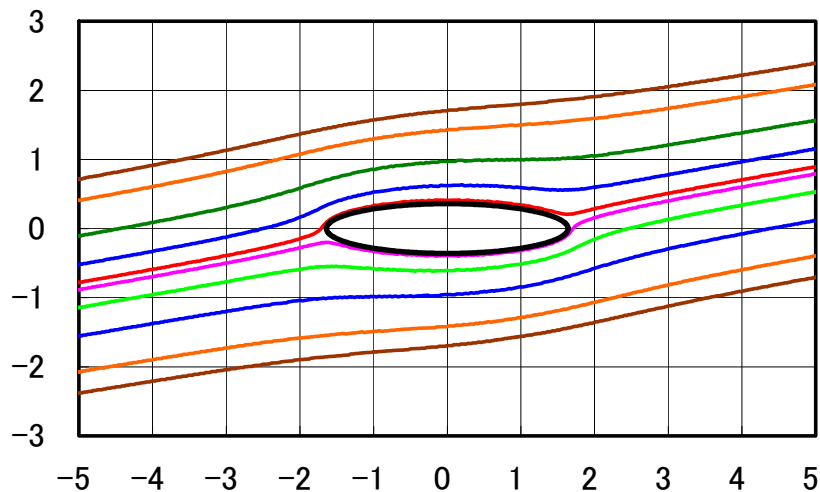
```

変数 b 入力 (0:円, 0<b<1:楕円, 1:平板)=
0.8
迎角  $\alpha$  (deg) 入力=
10
循環を入れる=1, 循環を入れない=2, キーイン
2

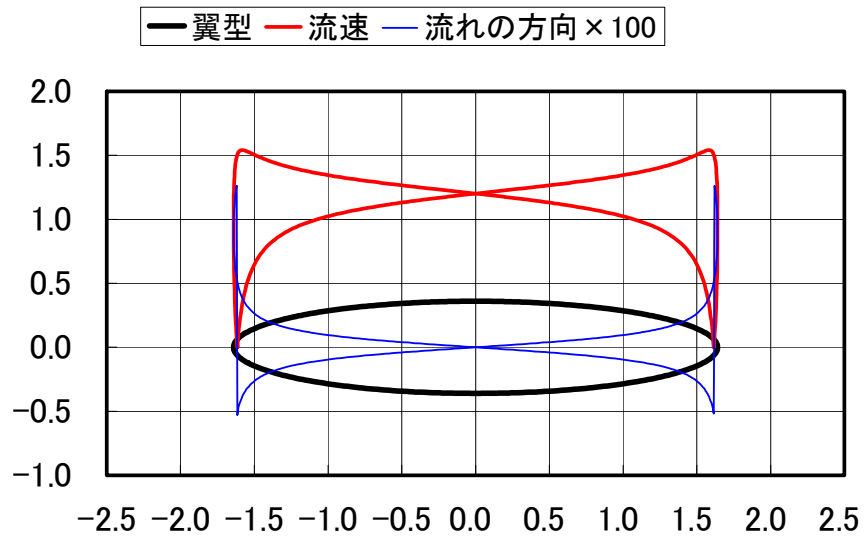
迎角  $\alpha$  =      10.000000 (deg)
CL =      0.000000E+00
(参考)  $2\pi \sin\alpha$  =      1.091064
CL/( $2\pi \sin\alpha$ ) =      0.000000E+00
Cm 原点 =      2.556783E-01 (循環に無関係)

```

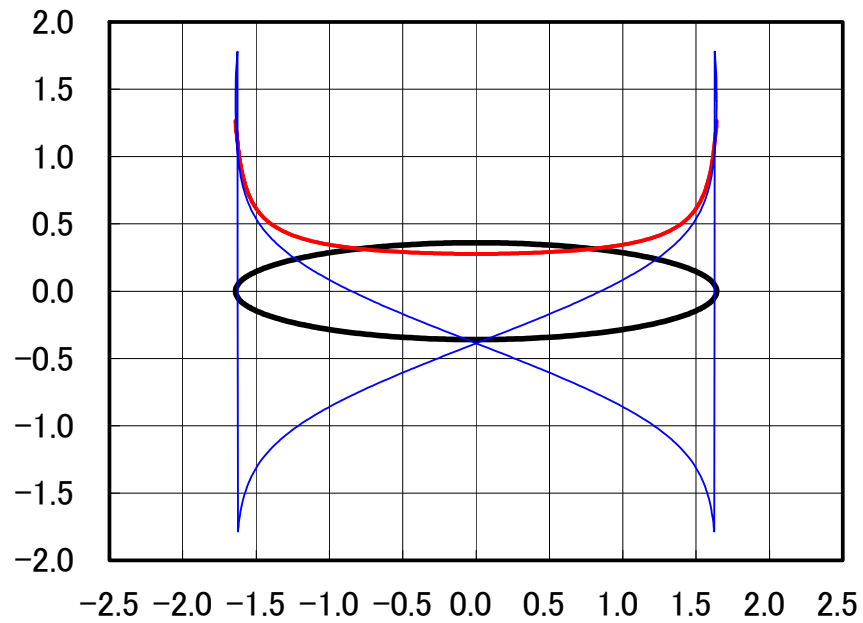
ここで, 「1: 表示用 Excel 図」を選択すると, Excel 図のメニューが表示されるので, その中の「KMAP 翼理論, 翼型と流線.xls」を起動してデータ更新すると, 下記の図が表示される.



次に, Excel 図のメニューの中の「KMAP 翼理論, 翼型と翼上流速.xls」を起動してデータ更新すると, 下記の図が表示される.



(下図は一様流を除いた流れ)



(2) 循環を考慮した楕円翼

KMAP104 以降で，“0”，“4”，“2” とキーインして，

「2: 楕円翼の流れ」にて下記をキーイン計算した結果を以下に示す．

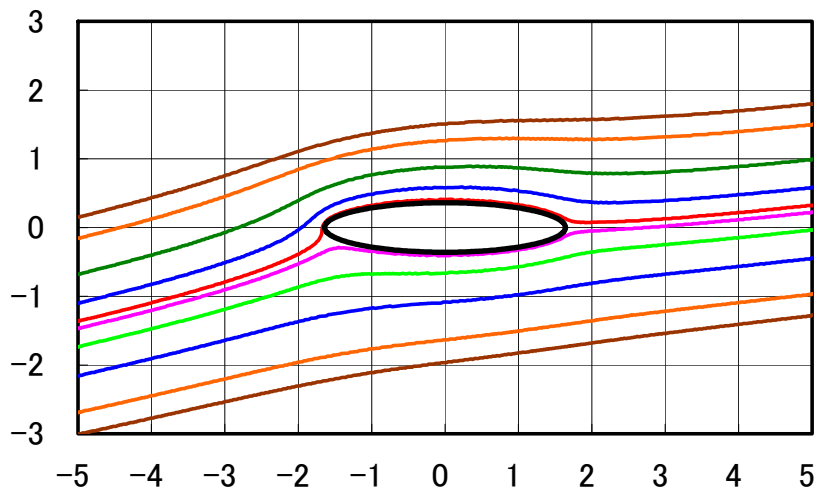
```

変数 b 入力 (0:円, 0<b<1:楕円, 1:平板)=
0.8
迎角  $\alpha$  (deg) 入力=
10
循環を入れる=1, 循環を入れない=2, キーイン
1

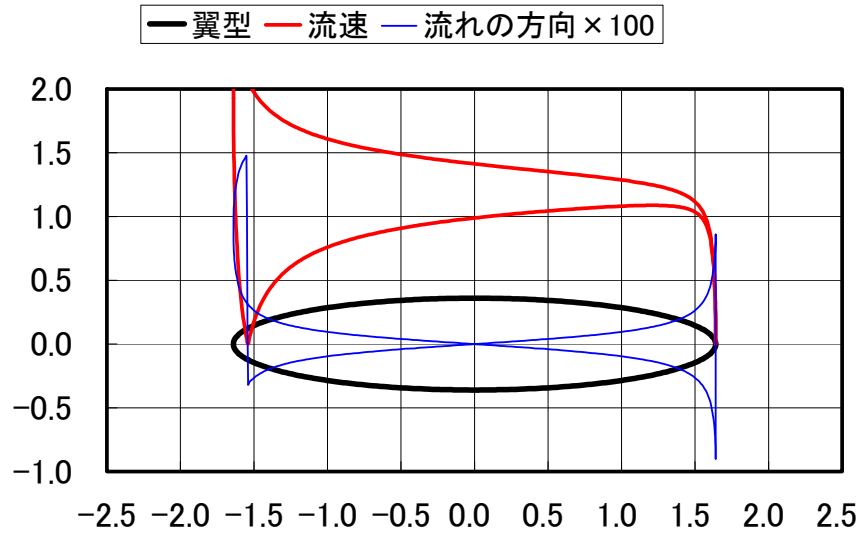
迎角  $\alpha$  =          10.000000 (deg)
CL =                1.330566
(参考)  $2\pi \sin\alpha$  =      1.091064
CL/( $2\pi \sin\alpha$ ) =      1.219512
Cm 原点 =          2.556783E-01 (循環に無関係)

```

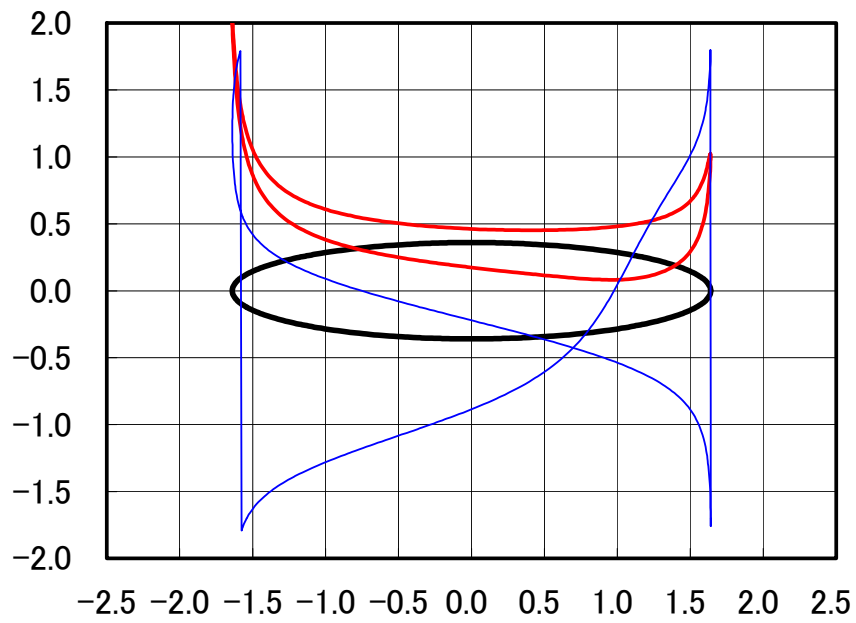
ここで，「1: 表示用 Excel 図」を選択すると，Excel 図のメニューが表示されるので，その中の「KMAP 翼理論, 翼型と流線.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される．



次に，Excel 図のメニューの中の「KMAP 翼理論, 翼型と翼上流速.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される．



(下図は一様流を除いた流れ)



(3) 循環を考慮した平板翼

KMAP104 以降で，“0”，“4”，“2” とキーインして，

「2: 楕円翼の流れ」にて下記をキーイン計算した結果を以下に示す．

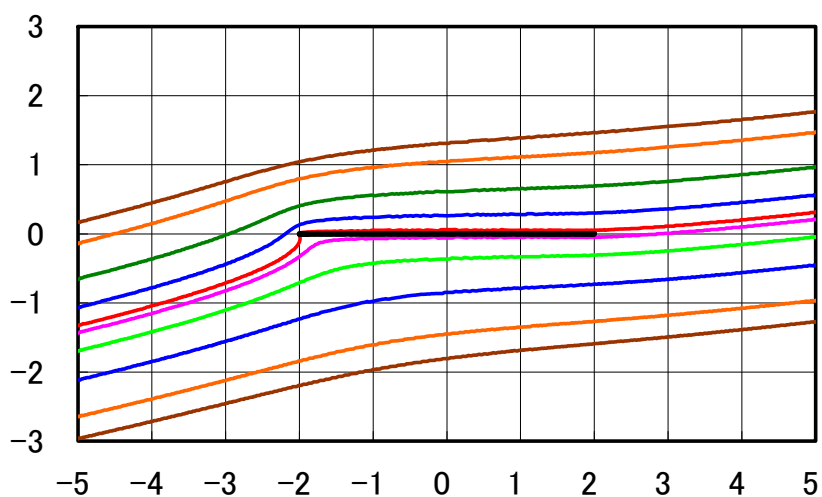
```

変数 b 入力 (0:円, 0<b<1:楕円, 1:平板)=
1
迎角  $\alpha$  (deg) 入力=
10
循環を入れる=1, 循環を入れない=2, キーイン
1

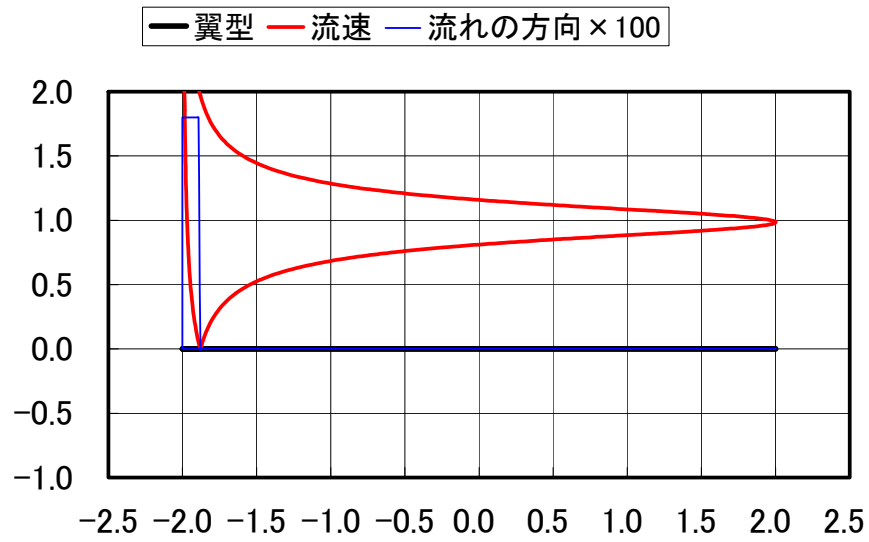
        迎角  $\alpha$  =          10.000000 (deg)
          CL =          1.091064
(参考)  $2\pi \sin\alpha$  =          1.091064
        CL/( $2\pi \sin\alpha$ ) =          1.000000
        Cm 原点 =          2.686220E-01 (循環に無関係)

```

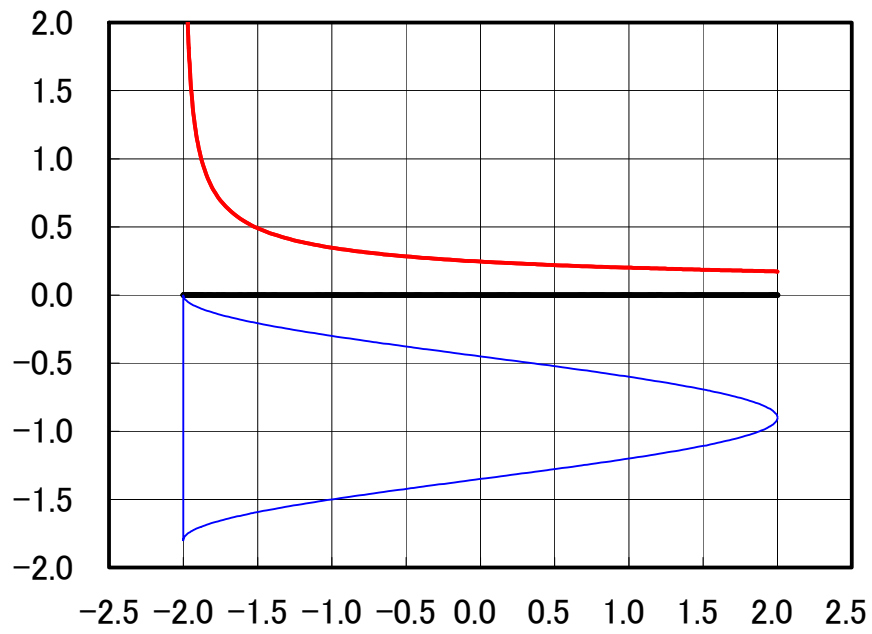
ここで，「1：表示用 Excel 図」を選択すると，Excel 図のメニューが表示されるので，その中の「KMAP 翼理論, 翼型と流線.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される．



次に，Excel 図のメニューの中の「KMAP 翼理論, 翼型と翼上流速.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される．



(下図は一様流を除いた流れ)



(4) 循環なしの円柱

KMAP104 以降で, “0”, “4”, “2” とキーインして,

「2: 楕円翼の流れ」にて下記をキーイン計算した結果を以下に示す.

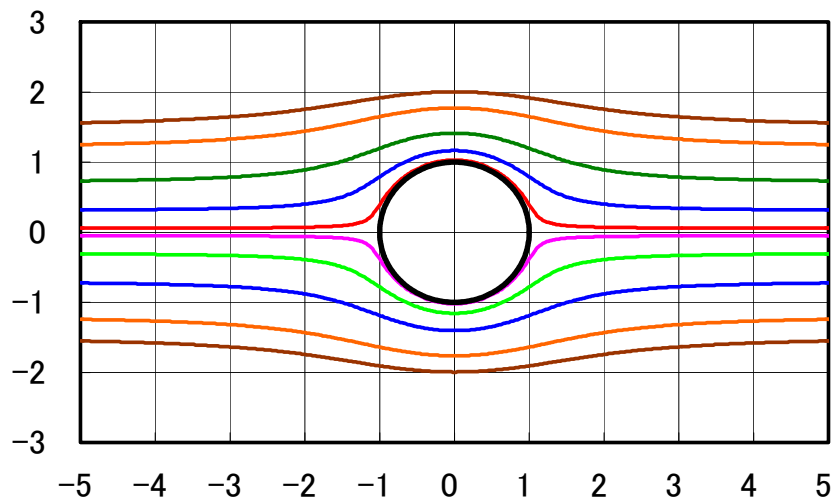
```

変数 b 入力 (0:円, 0<b<1:楕円, 1:平板)=
0
迎角  $\alpha$  (deg) 入力=
0
循環を入れる=1, 循環を入れない=2, キーイン
2

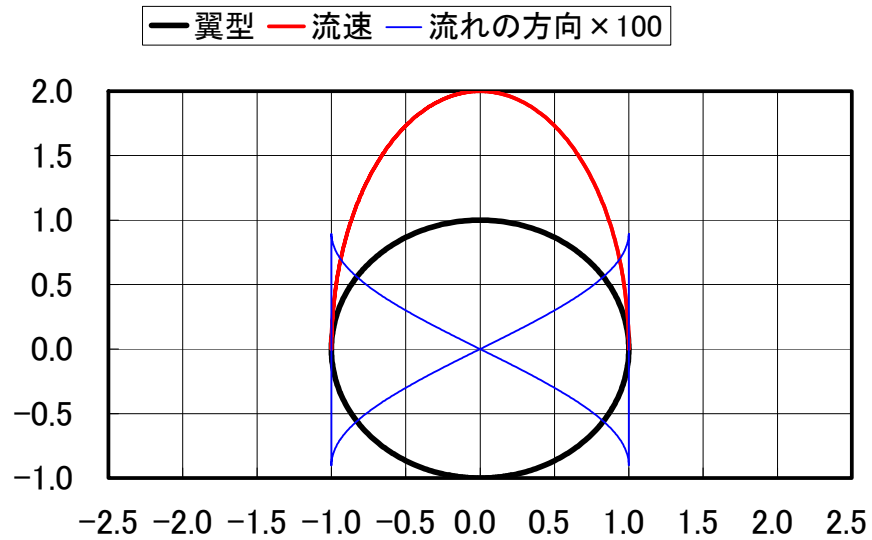
迎角  $\alpha$  = 0.000000E+00 (deg)
CL = 0.000000E+00
(参考)  $2\pi \sin \alpha$  = 0.000000E+00
Cm 原点 = 0.000000E+00 (循環に無関係)

```

ここで, 「1: 表示用 Excel 図」を選択すると, Excel 図のメニューが表示されるので, その中の「KMAP 翼理論, 翼型と流線.xls」を起動してデータ更新すると, 下記の図が表示される.



次に, Excel 図のメニューの中の「KMAP 翼理論, 翼型と翼上流速.xls」を起動してデータ更新すると, 下記の図が表示される.



(下図は一様流を除いた流れ)

